

ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА НАГРУЖЕНИЯ ИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ, АРМИРОВАННОЙ РЕШЕТКОЙ КВАДРАТНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Илья Федорович Старцев

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Москва, Россия

I_kotorii_I@mail.ru

Аннотация

В данной работе приведено построение решения плоской двоякопериодической задачи нагружения бесконечной упругой изотропной плоскости с решеткой квадратных включений. Плоскость находится под одной из двух нагрузок: растягивается под углом к оси X или испытывает чистый сдвиг на бесконечности. Правильная квадратная ячейка периодичности содержит одно квадратное включение со сторонами перпендикулярными границам ячейки. Размер включения намного больше толщины пластины. Напряжения находятся вблизи концентратора напряжений - на границе включения и матрицы. Решение задачи сводится к поиску комплексных функций из граничных условий, полученных из равенства нормальных усилий и перемещений матрицы и включения, с помощью конформных отображений и интегрирования методом Мушхелишвили. Влияние нецентральных включений выражается с помощью метода малого параметра. В результате получена система линейных алгебраических уравнений для решения рассматриваемой двоякопериодической задачи и найдены решения для нескольких частных случаев. Результат был сверен с численным решением методом конечных элементов в программном комплексе Abaqus. Решение данной задачи представляет собой моделирование нагружения волокнистого композита, что придает ему высокую актуальность. По теме волокнистых композитов в механике опубликовано сравнительно небольшое количество работ, большинство из которых посвящено анализу экспериментальных исследований или численных решений, поэтому данное аналитическое решение обладает значительной научной ценностью.

Ключевые слова и фразы

двоякопериодическая задача, комплексные функции, конформные отображения, метод малого параметра, интегрирование методом Мусхелишвили, квадратные включения .

Для цитирования

Старцев И. Ф. Двоякопериодическая задача нагружения изотропной плоскости, армированной решеткой квадратных включений // *Математические труды*, 2025, Т. 28, № 3, С. 125-145. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-3-125-145

Two-periodic problem of loading isotropic plane with a grid of square inclusions

Ilya F. Starcev

M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

I_kotorii_I@mail.ru

Abstract

This paper presents the construction of a solution to a plane doubly periodic loading problem for an infinite elastic isotropic plane with a lattice of square inclusions. The plane is subject to one of two loads: either tension at an angle to the X-axis or pure shear at infinity. A regular square periodic cell contains a single square inclusion with sides perpendicular to the cell boundaries. The size of the inclusion is much larger than the plate thickness. The stresses are located near the stress concentrator—at the boundary between the inclusion and the matrix. The solution to the problem is reduced to finding complex functions from the boundary conditions obtained from the equality of the normal forces and displacements of the matrix and inclusion, using conformal mappings and integration by Muskhelishvili's method. The influence of non-central inclusions is expressed using the small parameter method. As a result, a system of linear algebraic equations was obtained for solving the doubly periodic problem under consideration, and solutions were found for several special cases. The result was verified against a numerical solution using the finite element method in the Abaqus software package. The solution to this problem involves modeling the loading of a fiber composite, making it highly relevant. Relatively few works have been published on the topic of fiber composites in mechanics, most of which are devoted to the analysis of experimental studies or numerical solutions, so this analytical solution has significant scientific value.

ISSN 1560-750X

Математические труды, 2025, Том 28, № 3, С. 125-145

Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 3, P. 125-145

Keywords

two-periodic problem, complex functions, conformal mapping, small parameter method, integration by the method of Muskhelishvili, square inclusions.

For citation

Starcev I. F. Two-periodic problem of loading isotropic plane with a grid of square inclusions // *Mat. Trudy*, 2025, T. 28, № 3, С. 125-145. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-3-125-145

Введение

Целью данной работы является решение двоякопериодической задачи нагружения плоскости с решеткой квадратных ядер. Решение, приведенное в данной работе, сводится к данному в ранней работе [1]. Отличия заключаются в дополнительных коэффициентах и их значениях в итоговой линейной системе уравнений, что говорит об универсальности метода и его применимости для ещё более широкого спектра плоских задач с любой формой включения и периодичностью.

Метод решения плоских задач с использованием комплексных функций был предложен Мусхелишвили в работе [2]. В работе [3] этот метод применялся для анализа задачи с одним включением. Решение для правильных многоугольных отверстий было дано Савиным Г.Н. [4]. В исследованиях [5] и [6] рассматривались двоякопериодические задачи с круговыми отверстиями. В работах [7] и [8] и метод Мусхелишвили был использован для изучения периодических задач с криволинейными отверстиями. В работе [9] делается вывод об однородности напряжений для одного включения. Интегрируя все вышеперечисленные подходы, была создана настоящая работа.

§ 1. Постановка задачи

Дана бесконечная упругая изотропная плоскость, ослабленная конечной решеткой одинаковых изотропных квадратных ядер. Сторона квадратной ячейки периодичности равна L , при этом предполагается, что размер решетки намного больше L . Стороны включения равны a и b . Сторонам включения выдано два параметра, чтобы в случае необходимости была возможность свести решение к аналогичной задаче с эллиптическими включениями. На границе включения радиальные и касательные напряжения и перемещения ядра и плоскости равны. На бесконечности действуют растягивающие усилия p под углом α к оси X и действует чистый

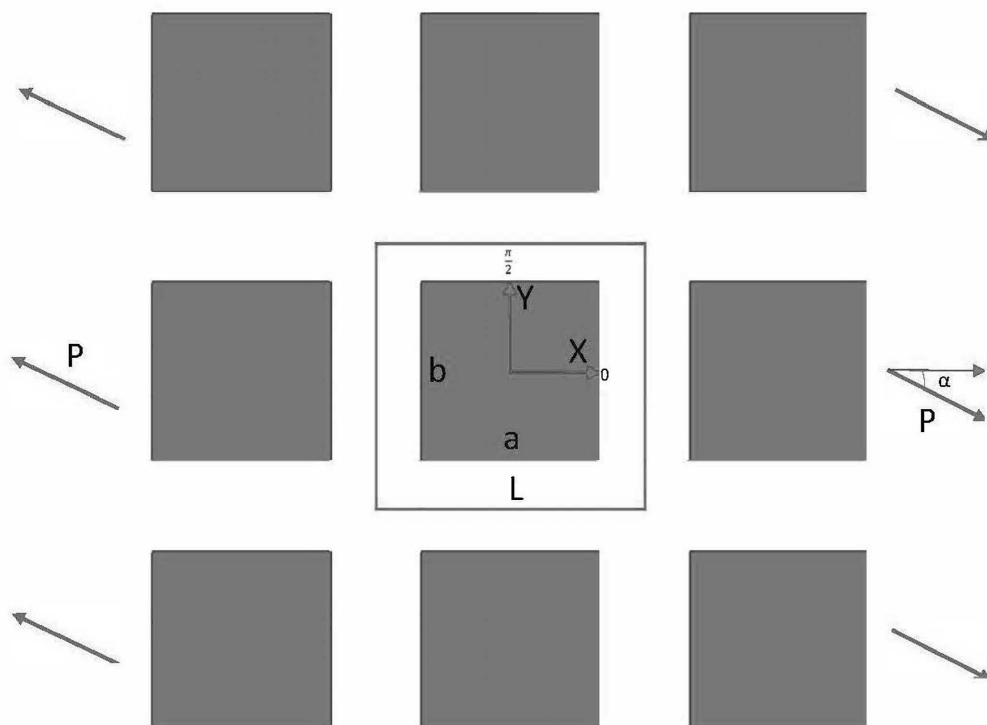


Рис. 1. Постановка задачи.

сдвиг k .

Рассмотрим ячейку, удаленную от края решетки (рис. 1); в этом случае напряженно-деформированное состояние можно считать периодическим. Включение, расположенное в этой ячейке, назовём основным.

Задача о напряжённом состоянии на границе матрицы и включения сводится к определению комплексных потенциалов $\phi(z)$, $\psi(z)$, $\phi^{(r)}(z)$ и $\psi^{(r)}(z)$ из следующих граничных условий на контуре основного включения [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8]:

$$\begin{aligned} \phi(t) + \frac{\omega(t)}{\omega'(t)} \overline{\phi'(t)} + \overline{\psi(t)} &= f_1 + \phi^{(r)}(t) + \frac{\omega(t)}{\omega'(t)} \overline{\phi'^{(r)}(t)} + \overline{\psi^{(r)}(t)}, \\ \chi \phi(t) - \frac{\omega(t)}{\omega'(t)} \overline{\phi'(t)} - \overline{\psi(t)} &= f_2 + \frac{\mu}{\mu^{(r)}} \left(\chi^{(r)} \phi^{(r)}(t) - \frac{\omega(t)}{\omega'(t)} \overline{\phi'^{(r)}(t)} - \overline{\psi^{(r)}(t)} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь t – комплексное число, соответствующее точке на границе основного включения, $\omega(t)$ – конформное отображение внешности квадратного включения на внешность единичной окружности, функции без индекса $^{(r)}$

относятся к матрице, функции с индексом к включению, $\chi = 3 - 4\nu = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}$, ν – коэффициент Пуассона, λ и μ – параметры Ламе, а функции f_1, f_2 – условия на бесконечности [2]:

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{p}{4} \left(t + \frac{t + m_1/t + m_3/t^3}{(1 - t^2 m_1 - 3t^4 m_3)} \right) + \frac{pe^{2i\alpha} - 2ik}{2t}, \\ f_2 &= -\frac{p}{4} \left(\chi t - \frac{t + m_1/t + m_3/t^3}{(1 - t^2 m_1 - 3t^4 m_3)} \right) - \frac{pe^{2i\alpha} - 2ik}{2t}, \end{aligned} \quad (2)$$

где m_1 и m_3 – параметры конформного отображения, описанного в следующей части.

Напряжения находятся из этих комплексных функций по формулам Колосова-Мусхелишвили.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= p + 4\operatorname{Re}\phi'(z), \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= -pe^{2i\alpha} + 2ik + 2(\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)). \end{aligned} \quad (3)$$

§ 2. Конформное отображение плоскости с квадратными включениями.

Пусть ζ_{ns} – координаты точки, соответствующей системе координат, расположенной в центре включения с центром в точке (nL, sL) и при $n = 0, s = 0$ соответствующей системе координат основного включения.

Функция, конформно отображающая внешность квадратного включения со скругленными углами и центром в точке (nL, sL) на внешность единичного круга, имеет вид [8]:

$$z + L(n + is) = R(\zeta_{ns} + m_1 \zeta_{ns}^{-1} + m_3 \zeta_{ns}^{-3}), \quad (4)$$

где $R = \frac{a+b}{2}$.

Для квадратного включения с радиусом кривизны 15: $m_1 = 0, m_3 = -\frac{1}{9}$.

Для эллиптического включения: $m_1 \in [0, 1], m_3 = 0$, и в частности для кругового $m_1 = 0$.

Без ограничения общности будем считать $R = 1$. Таким образом, мы произвели обезразмеривание, и переменные, имеющие размерность длины, будут измеряться по отношению к полусумме сторон включения.

§ 3. Малый параметр.

Приведем уравнение (4) к следующему виду:

$$\frac{1}{\zeta_{ns}} = \frac{1}{L(n+is)} \left(R - \frac{z}{\zeta_{ns}} + \frac{m_1 R}{\zeta_{ns}^2} + \frac{m_3 R}{\zeta_{ns}^4} \right). \quad (5)$$

Введем малый параметр $\varepsilon = \frac{R}{L}$. Он принимает значения от 0 до 0.5. Разложим ζ_{ns}^{-1} по степеням ε до 4-й степени, приняв $R = 1$:

$$\frac{1}{\zeta_{ns}} = \frac{\varepsilon}{(n+is)} \left(1 - \frac{z}{\zeta_{ns}} + \frac{m_1}{\zeta_{ns}^2} + \frac{m_3}{\zeta_{ns}^4} \right) = a_0 + a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + a_3 \varepsilon^3 + a_4 \varepsilon^4. \quad (6)$$

Подставим уравнение (5) и (6), уточнив, что a_0 не влияет на решение и его можно приравнять нулю, и тогда получим следующее:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, & a_1 &= \frac{1}{(n+is)}, \\ a_2 &= -\frac{z}{(n+is)^2}, & a_3 &= \frac{z^2 + m_1}{(n+is)^3}, \\ a_4 &= -\frac{3m_1 z + z^3}{(n+is)^4}. \end{aligned} \quad (7)$$

§ 4. Решение краевой задачи.

Известный результат работы Эшелби [9], что для одного включения его напряжения есть постоянная величина, и комплексные функции линейны по z . Поэтому для данной задачи функции напряжений основного включения разложим в степенной ряд до следующей ненулевой степени, то есть ввиду симметрии задачи до 3-ого члена:

$$\begin{aligned} \phi^{(r)}(z) &= A_1^{(r)} z + A_3^{(r)} z^3, \\ \psi^{(r)}(z) &= B_1^{(r)} z + B_3^{(r)} z^3. \end{aligned} \quad (8)$$

Искомые функции $\phi(z)$ и $\psi(z)$ из уравнения (1) разложим в ряд по степеням ζ_{ns} :

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta_{ns}^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^{-k} + \sum_{n^*=-\infty}^{\infty} \sum_{s^*=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta_{ns}^{-k}, \\ \psi(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \zeta^{-k} + \sum_{n^*=-\infty}^{\infty} \sum_{s^*=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \zeta_{ns}^{-k},\end{aligned}\quad (9)$$

здесь $\zeta = \zeta_{00}$, и знак $*$ означает отсутствие в сумме номера $n^* = 0, s^* = 0$.

Подставим уравнение (7) в уравнение (9), где ввиду симметрии задачи коэффициенты при четных степенях z равны нулю:

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \phi^*(\zeta) + \varepsilon^2 l_2(z) + \varepsilon^4 l_4(z), \\ \psi(z) &= \psi^*(\zeta) + \varepsilon^2 p_2(z) + \varepsilon^4 p_4(z),\end{aligned}\quad (10)$$

где

$$\begin{aligned}\phi^*(\zeta) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^{-k}, \quad \psi^*(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \zeta^{-k}, \\ l_2 &= - \sum_{n^*=-\infty}^{\infty} \sum_{s^*=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+is)^2} z a_1 = k_2 z a_1, \\ p_2 &= - \sum_{n^*=-\infty}^{\infty} \sum_{s^*=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+is)^2} z b_1 = k_2 z b_1, \\ l_4 &= - \sum_{n^*=-\infty}^{\infty} \sum_{s^*=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+is)^4} (a_1 z^3 + 3z(a_3 + m_1 a_1)) = \\ &= k_4 (a_1 z^3 + 3z(a_3 + m_1 a_1)), \\ p_4 &= - \sum_{n^*=-\infty}^{\infty} \sum_{s^*=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+is)^4} (b_1 z^3 + 3z(b_3 + m_1 b_1)) = \\ &= k_4 (b_1 z^3 + 3z(b_3 + m_1 b_1)).\end{aligned}\quad (11)$$

Ниже двойные ряды посчитаны для 10^6 членов в программном комплексе Wolfram Mathematica:

$$\begin{aligned}k_2 &= \sum_{n^*=-\infty}^{\infty} \sum_{s^*=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+is)^2} = 0, \\ k_4 &= \sum_{n^*=-\infty}^{\infty} \sum_{s^*=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+is)^4} = 3.151.\end{aligned}\quad (12)$$

Докажем сходимость этих рядов. Для первого двойного ряда легко показать, что для каждого члена ряда существует парный ему отрицательный член ряда, и поэтому сумма сходится к нулю. Покажем абсолютную сходимость второго ряда. Модуль общего члена равен:

$$\left| \frac{1}{(n+is)^4} \right| = \frac{1}{(n^2+s^2)^2}. \quad (13)$$

Разобьем ряд на части:

$$\begin{aligned} \sum_{n^*=-\infty}^{\infty} \sum_{s^*=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n^2+s^2)^2} &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+s^2)^2} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \\ &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+s^2)^2} + \frac{2\pi^4}{45}. \end{aligned} \quad (14)$$

Воспользуемся интегральным признаком, перейдем в полярные координаты $n = r \cos \theta$, $s = r \sin \theta$ и расширим область до $r \in [1, +\infty]$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Тогда получаем следующее:

$$\int_{n=1}^{\infty} \int_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+s^2)^2} dn ds \leq \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^4} r dr d\theta = \frac{\pi}{4}. \quad (15)$$

Таким образом, двойной ряд $\sum_{n^*=-\infty}^{\infty} \sum_{s^*=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+is)^4}$ абсолютно сходится.

В итоге, граничные условия (1) для контура основного включения перепишем с учётом (8) и (10):

$$\begin{aligned} 1) \phi^*(t) + \frac{\omega(t)}{\omega'(t)} \overline{\phi'^*(t)} + \overline{\psi^*(t)} &= -\frac{p}{4} \left(t + \frac{t + m_1/t + m_3/t^3}{(1 - t^2 m_1 - 3t^4 m_3)} \right) + \\ &+ \frac{pe^{2i\alpha} - 2ik}{2t} + A_{-5}^* t^{-5} + A_{-3}^* t^{-3} + A_{-1}^* t^{-1} + A_1^* t + A_3^* t^3 + A_5^* t^5, \\ 2) \chi \phi^*(t) - \frac{\omega(t)}{\omega'(t)} \overline{\phi'^*(t)} - \overline{\psi^*(t)} &= -\frac{p}{4} \left(\chi t - \frac{t + m_1/t + m_3/t^3}{(1 - t^2 m_1 - 3t^4 m_3)} \right) - \\ &- \frac{pe^{2i\alpha} - 2ik}{2t} + A_{-5}^{**} t^{-5} + A_{-3}^{**} t^{-3} + A_{-1}^{**} t^{-1} + A_1^{**} t + A_3^{**} t^3 + A_5^{**} t^5, \end{aligned} \quad (16)$$

где A_{-5}^* , A_{-3}^* , A_{-1}^* , A_1^* , A_3^* , A_5^* , A_{-5}^{**} , A_{-3}^{**} , A_{-1}^{**} , A_1^{**} , A_3^{**} , A_5^{**} коэффициенты при степенях t (значение опущено).

Из граничного условия (16) методом Н.И. Мусхелишвили [2] найдём:

$$\begin{aligned}
 \phi^*(t) &= \left(\frac{pe^{2i\alpha} - 2ik}{2} - m_1 \frac{p}{4} \right) \frac{1}{t} + \left(m_3 \frac{p}{4} \right) \frac{1}{t^3} + A_{-1}^* \frac{1}{t} + A_{-3}^* \frac{1}{t^3} + A_{-5}^* \frac{1}{t^5}, \\
 \chi \phi^*(t) &= \left(-\frac{pe^{2i\alpha} - 2ik}{2} + m_1 \frac{p}{4} \right) \frac{1}{t} + \left(m_3 \frac{p}{4} \right) \frac{1}{t^3} + A_{-1}^{**} \frac{1}{t} + A_{-3}^{**} \frac{1}{t^3} + A_{-5}^{**} \frac{1}{t^5}, \\
 \psi^*(t) &= -\frac{p}{4} \left(\frac{1}{t} + \frac{3(m_1 m_3)t + (1 + m_1^2 + 3m_3^2)t^3 + m_1 m_3 t^5}{t^4 - m_1 t^2 - 3m_3} \right) - \\
 &\quad - \frac{t^3(1 + m_1 t^2 + m_3 t^4)}{t^4 - m_1 t^2 - 3m_3} \phi'^* + A_1^* \frac{1}{t} + A_3^* \frac{1}{t^3} + A_5^* \frac{1}{t^5}, \\
 \psi^*(t) &= \frac{p}{4} \left(\chi \frac{1}{t} - \frac{3(m_1 m_3)t + (1 + m_1^2 + 3m_3^2)t^3 + m_1 m_3 t^5}{t^4 - m_1 t^2 - 3m_3} \right) - \\
 &\quad - \frac{t^3(1 + m_1 t^2 + m_3 t^4)}{t^4 - m_1 t^2 - 3m_3} \phi'^* + A_1^{**} \frac{1}{t} + A_3^{**} \frac{1}{t^3} + A_5^{**} \frac{1}{t^5}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Выражение $\frac{1}{t^4 - m_1 t^2 - 3m_3}$ представим в виде ряда, ограничившись первыми четырьмя членами:

$$\frac{1}{t^4 - m_1 t^2 - 3m_3} = \frac{1}{t^4} + \frac{m_1}{t^6} + \frac{m_1^2 + 3m_3}{t^8} + \frac{m_1^3 + 6m_1 m_3}{t^{10}}. \tag{18}$$

Таким образом, подставляем (18) в (17), приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях t в левой и правой части и тогда получаем, что коэффициенты $a_1, b_1, a_3, b_3, A_1^{(r)}, A_3^{(r)}, B_1^{(r)}, B_3^{(r)}$ определяются из следующей алгебраической системы:

$$\begin{aligned}
 1) & a_1(1 - m_1 \varepsilon^2 k_2 + (-6m_1^2 - 3m_3)\varepsilon^4 k_4) + \overline{a_1}(-m_1 \varepsilon^2 k_2 - 3(1 + 3m_1^2 + m_1^2 m_3 + \\
 & + 2m_3^2)\varepsilon^4 k_4) + a_3(-3m_1 \varepsilon^4 k_4) + \overline{a_3}(-3m_1 \varepsilon^4 k_4) + \overline{b_1}(-\varepsilon^2 k_2 - 6m_1 \varepsilon^4 k_4) + \\
 & + \overline{b_3}(-3\varepsilon^4 k_4) + A_1^{(r)}(-m_1) + \overline{A_1^{(r)}}(-m_1) + A_3^{(r)}(-3(m_1^2 + m_3)) + \overline{A_3^{(r)}}(-3 - \\
 & - 6m_1^2 - 3m_1^2 m_3 - 6m_3^2) + A_5^{(r)}(-10m_1^3 - 20m_1 m_3) + \overline{A_5^{(r)}}(-20m_1 - 30m_1^3 - \\
 & - 20m_1 m_3 - 20m_1^3 m_3 - 60m_1 m_3^2) + \overline{B_1^{(r)}}(-1) + \overline{B_3^{(r)}}(-3m_1) + \overline{B_5^{(r)}}(-10m_1^2 - \\
 & - 5m_3) = -\frac{m_1 p}{4} + \frac{-2ik + pe^{2i\alpha}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2)a_1(-m_3\varepsilon^2k_2 + (-m_1^3 - 9m_1m_3)\varepsilon^4k_4) + \overline{a_1}(-m_3\varepsilon^2k_2 + (-3m_1 - \\
& - 9m_1m_3)\varepsilon^4k_4) + a_3(1 - 3m_3\varepsilon^4k_4) + \overline{a_3}(-3m_3\varepsilon^4k_4) + \overline{b_1}(-\varepsilon^4k_4) + \\
& + A_1^{(r)}(-m_3) + \overline{A_1^{(r)}}(-m_3) + A_3^{(r)}(-m_1^3 - 6m_1m_3) + \overline{A_3^{(r)}}(-3(m_1 + 2m_1m_3)) + \\
& + A_5^{(r)}(-5m_1^4 - 30m_1^2m_3 - 10m_3^2) + \overline{A_5^{(r)}}(-5 - 20m_1^2 - 30m_1^2m_3 - 20m_3^2) + \\
& + \overline{B_3^{(r)}}(-1) + \overline{B_5^{(r)}}(-5m_1) = -\frac{m_3p}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 3)a_1((-3m_1^2m_3 - 3m_3^2)\varepsilon^4k_4) + \overline{a_1}((-3m_3)\varepsilon^4k_4) + a_5 + \overline{a_5} + A_3^{(r)}(-3(m_1^2m_3 + \\
& + m_3^2)) + \overline{A_3^{(r)}}(-3m_3) + A_5^{(r)}(-m_1^5 - 20m_1^3m_3 - 30m_1m_3^2) + \overline{A_5^{(r)}}(-5m_1 - \\
& - 20m_1m_3) + \overline{B_5^{(r)}}(-1) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4)a_1(-m_1 - m_1m_3 - \varepsilon^2k_2 + \varepsilon^4k_4(-9m_1 - 3m_1^3 - 6m_1m_3 - 6m_1m_3^2)) + \\
& + \overline{a_1}(-\varepsilon^2k_2 - 6\varepsilon^4k_4m_1) + a_3(-3m_3 - 3\varepsilon^4k_4) + \overline{a_3}(-3\varepsilon^4k_4) + b_1(1 - \varepsilon^2k_2m_1 + \\
& + \varepsilon^4k_4(-6m_1^2 - 3m_3)) + b_3(-3\varepsilon^4k_4m_1) - A_1^{(r)} - \overline{A_1^{(r)}} + A_3^{(r)}(-3(2m_1 + m_1^3 + \\
& + 2m_1m_3 + 2m_1m_3^2)) + \overline{A_3^{(r)}}(-3m_1) + A_5^{(r)}(-30m_1^2 - 20m_1^4 - 20m_3 - \\
& - 60m_1^2m_3 - 5m_1^4m_3 - 60m_1^2m_3^2 - 30m_3^3) + \overline{A_5^{(r)}}(-10m_1^2 - 5m_3) + \\
& + B_1^{(r)}(-m_1) + B_3^{(r)}(-3(m_1^2 + m_3)) + B_5^{(r)}(-10m_1^3 - 20m_1m_3) = \\
& = -\frac{p}{4}(2 + m_1^2 + m_3(m_1^2 + 3m_3))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 5)a_1(-1 - m_1^2 - m_3(m_1^2 + 3m_3) + \varepsilon^4k_4(-3m_1^2 - 6m_3 - 6m_1^2m_3 - 3m_3^3)) + \\
& + \overline{a_1}(-\varepsilon^4k_4) + a_3(-3m_1 - 3m_1m_3) + a_5(-5m_3) + b_1(-\varepsilon^2k_2m_3 + \varepsilon^4k_4(-m_1^3 - \\
& - 9m_1m_3)) + b_3(1 - 3\varepsilon^4k_4m_3) + A_3^{(r)}(-3(m_1^2 + 2m_3 + 2m_1^2m_3 + m_3^3)) + \\
& + \overline{A_3^{(r)}}(-1) + A_5^{(r)}(-20m_1^3 - 5m_1^5 - 60m_1m_3 - 60m_1^3m_3 - 30m_1m_3^2 - \\
& - 20m_1^3m_3^2 - 60m_1m_3^3) + \overline{A_5^{(r)}}(-5m_1) + B_1^{(r)}(-m_3) + B_3^{(r)}(-m_1^3 - 6m_1m_3) + \\
& + B_5^{(r)}(-5m_1^4 - 30m_1^2m_3 - 10m_3^2) = \\
& = -\frac{p}{4}(m_1 + m_1(m_1^2 + 3m_3) + m_3(m_1^3 + 6m_1m_3))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 6) a_1(-m_1 - m_1(m_1^2 + 3m_3) - m_3(m_1^3 + 6m_1m_3) + \varepsilon^4 k_4(-6m_1m_3 - 3m_1m_3^2)) + \\
& + a_3(-3 - 3m_1^2 - 3m_3(m_1^2 + 3m_3)) + a_5(-5m_1 - 5m_1m_3) + \\
& + b_1(\varepsilon^4 k_4(-3m_1^2m_3 - 3m_3^2)) + b_5 + A_3^{(r)}(-3(2m_1m_3 + m_1m_3^2)) - \overline{A_5^{(r)}} + \\
& + B_3^{(r)}(-3(m_1^2m_3 + m_3^2)) + B_5^{(r)}(-m_1^5 - 20m_1^3m_3 - 30m_1m_3^2) = \\
& = -\frac{p}{4}(m_1^2 + 3m_3 + m_1(m_1^3 + 6m_1m_3) + m_3(m_1^4 + 9m_1^2m_3 + 9m_3^2))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 7) a_1(\varkappa(1 - m_1\varepsilon^2k_2 + (-6m_1^2 - 3m_3)\varepsilon^4k_4) + \overline{a_1}(m_1\varepsilon^2k_2 + 3(1 + 3m_1^2 + m_1^2m_3 + \\
& + 2m_3^2)\varepsilon^4k_4)) + a_3(\varkappa(-3m_1\varepsilon^4k_4)) + \overline{a_3}(3m_1\varepsilon^4k_4) + \overline{b_1}(\varepsilon^2k_2 + 6m_1\varepsilon^4k_4) + \\
& + \overline{b_3}(3\varepsilon^4k_4) + A_1^{(r)}(-\frac{\mu}{\mu^{(r)}}\varkappa^{(r)}m_1) + \overline{A_1^{(r)}}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}m_1) + A_3^{(r)}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}\varkappa^{(r)}(-3m_1^2 - \\
& - 3m_3)) + \overline{A_3^{(r)}}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}(3 + 6m_1^2 + 3m_1^2m_3 + 6m_3^2)) + A_5^{(r)}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}\varkappa^{(r)}(-10m_1^3 - \\
& - 20m_1m_3)) + \overline{A_5^{(r)}}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}(20m_1 + 30m_1^3 + 20m_1m_3 + 20m_1^3m_3 + 60m_1m_3^2)) + \\
& + \overline{B_1^{(r)}}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}) + \overline{B_3^{(r)}}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}3m_1) + \overline{B_5^{(r)}}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}(10m_1^2 + 5m_3)) = \\
& = \frac{pm_1}{4} - \frac{-2ik + pe^{2i\alpha}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 8) a_1(\varkappa(-m_3\varepsilon^2k_2 + (-m_1^3 - 9m_1m_3)\varepsilon^4k_4) + \overline{a_1}(m_3\varepsilon^2k_2 + (3m_1 + \\
& + 9m_1m_3)\varepsilon^4k_4) + a_3(\varkappa(1 - 3m_3\varepsilon^4k_4)) + \overline{a_3}(3m_3\varepsilon^4k_4) + \overline{b_1}(\varepsilon^4k_4) + \\
& + A_1^{(r)}(-\frac{\mu}{\mu^{(r)}}\varkappa^{(r)}m_3) + \overline{A_1^{(r)}}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}m_3) + A_3^{(r)}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}\varkappa^{(r)}(-m_1^3 - 6m_1m_3)) + \\
& + \overline{A_3^{(r)}}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}3(m_1 + 2m_1m_3)) + A_5^{(r)}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}\varkappa^{(r)}(-5m_1^4 - 30m_1^2m_3 - 10m_3^2)) + \\
& + \overline{A_5^{(r)}}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}(5 + 20m_1^2 + 30m_1^2m_3 + 20m_3^2)) + \overline{B_3^{(r)}}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}) + \overline{B_5^{(r)}}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}5m_1) = \\
& = \frac{pm_3}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 9) a_1(\varkappa((-3m_1^2m_3 - 3m_3^2)\varepsilon^4k_4) + \overline{a_1}((3m_3)\varepsilon^4k_4) + a_5(\varkappa) + \\
& + A_3^{(r)}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}\varkappa^{(r)}(-3m_1^2m_3 - 3m_3^2)) + \overline{A_3^{(r)}}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}(3m_3)) + A_5^{(r)}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}\varkappa^{(r)}(-m_1^5 - \\
& - 20m_1^3m_3 - 30m_1m_3^2)) + \overline{A_5^{(r)}}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}(5m_1 + 20m_1m_3)) + \overline{B_5^{(r)}}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10) & a_1(-m_1 - m_1 m_3 - \varepsilon^2 k_2 - \varepsilon^4 k_4(9m_1 + 3m_1^3 + 6m_1 m_3 + 6m_1 m_3^2)) + \\
& + \overline{a_1}(\varkappa(\varepsilon^2 k_2 + 6\varepsilon^4 k_4 m_1)) + a_3(-3m_3 - 3\varepsilon^4 k_4) + \overline{a_3}(\varkappa(3\varepsilon^4 k_4)) + b_1(1 - \\
& \varepsilon^2 k_2 m_1 - \varepsilon^4 k_4(6m_1^2 + 3m_3)) + b_3(-3\varepsilon^4 k_4 m_1) + A_1^{(r)}(-\frac{\mu}{\mu^{(r)}}) + \overline{A_1^{(r)}}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}} \varkappa^{(r)}) + \\
& + A_3^{(r)}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}(-3(2m_1 + m_1^3 + 2m_1 m_3 + 2m_1 m_3^2))) + \overline{A_3^{(r)}}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}} \varkappa^{(r)} 3m_1) + \\
& + A_5^{(r)}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}(-5(6m_1^2 + 4m_1^4 + 4m_3 + 12m_1^2 m_3 + m_1^4 m_3 + 12m_1^2 m_3^2 + 6m_3^3))) + \\
& + \overline{A_5^{(r)}}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}} \varkappa^{(r)} 5(2m_1^2 + m_3))) + B_1^{(r)}(-\frac{\mu}{\mu^{(r)}} m_1) + B_3^{(r)}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}(-3(m_1^2 + m_3))) + \\
& + B_5^{(r)}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}(-5(2m_1^3 + 4m_1 m_3))) = \frac{p}{4}(-1 + \varkappa - m_1^2 - m_3(m_1^2 + 3m_3))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
11) & a_1(-1 - m_1^2 - m_3(m_1^2 + 3m_3) - \varepsilon^4 k_4(3m_1^2 + 6m_3 + 6m_1^2 m_3 + 3m_3^3)) + \\
& + \overline{a_1}(\varkappa(\varepsilon^4 k_4)) + a_3(-3m_1 - 3m_1 m_3) + a_5(-5m_3) + b_1(-\varepsilon^2 k_2 m_3 - \varepsilon^4 k_4(m_1^3 + \\
& + 9m_1 m_3)) + b_3(1 - 3\varepsilon^4 k_4 m_3) + A_3^{(r)}(-\frac{\mu}{\mu^{(r)}} 3(m_1^2 + 2m_3 + 2m_1^2 m_3 + m_3^3)) + \\
& + \overline{A_3^{(r)}}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}} \varkappa^{(r)}) + A_5^{(r)}(-\frac{\mu}{\mu^{(r)}} 5(4m_1^3 + m_1^5 + 12m_1 m_3 + 12m_1^3 m_3 + 6m_1 m_3^2 + \\
& + 4m_1^3 m_3^2 + 12m_1 m_3^3)) + \overline{A_5^{(r)}}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}} \varkappa^{(r)} 5m_1) + B_1^{(r)}(-\frac{\mu}{\mu^{(r)}} m_3) + \\
& + B_3^{(r)}(-\frac{\mu}{\mu^{(r)}}(m_1^3 + 6m_1 m_3)) + B_5^{(r)}(-\frac{\mu}{\mu^{(r)}} 5(m_1^4 + 6m_1^2 m_3 + 2m_3^2)) = \\
& = \frac{p}{4}(-m_1 - m_1(m_1^2 + 3m_3) - m_3(m_1^3 + 6m_1 m_3))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12) & a_1(-m_1 - m_1(m_1^2 + 3m_3) - m_3(m_1^3 + 6m_1 m_3) - \varepsilon^4 k_4(6m_1 m_3 + 3m_1 m_3^2)) + \\
& + a_3(-3 - 3m_1^2 - 3m_3(m_1^2 + 3m_3)) + a_5(-5m_1 - 5m_1 m_3) + \\
& + b_1(-\varepsilon^4 k_4(3m_1^2 m_3 + 3m_3^2)) + b_5 + A_3^{(r)}(-\frac{\mu}{\mu^{(r)}} 3(2m_1 m_3 + m_1 m_3^2)) + \\
& + A_5^{(r)}(-\frac{\mu}{\mu^{(r)}} 5(m_1^4 + 12m_1^2 m_3 + 4m_1^4 m_3 + 6m_3^2 + 12m_1^2 m_3^2 + 6m_1^2 m_3^3 + 4m_3^4)) + \\
& + \overline{A_5^{(r)}}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}} \varkappa^{(r)}) + B_3^{(r)}(-\frac{\mu}{\mu^{(r)}} 3(m_1^2 m_3 + m_3^2)) + B_5^{(r)}(-\frac{\mu}{\mu^{(r)}}(m_1^5 + 20m_1^3 m_3 + \\
& + 30m_1 m_3^2)) = \\
& = \frac{p}{4}(-m_1^2 - 3m_3 - m_1(m_1^3 + 6m_1 m_3) - m_3(m_1^4 + 9m_1^2 m_3 + 9m_3^2))
\end{aligned}$$

(19)

Система решалась для частных случаев с 1-2-3 переменными в программном комплексе Wolfram Mathematica.

Выше приведенная система также подходит для двоякопериодических задач с отверстиями, тогда следует занулить коэффициенты с индексом (r) , и непериодической задачи с одним концентратором напряжений, тогда необходимо занулить k_2 и k_4 . Помимо этого, её можно использовать для задач с круглыми отверстиями или включениями, зануляя m_1 и m_3 , и задач с узкими щелями, приравняв m_1 к единице, и занулив m_3 и коэффициенты с индексом r . Также, варьируя значения k_2 , k_4 и ε , можно получить систему для иных типов упаковки включений.

Результат сверен со справочником [10] стр. 178 Фиг. 119 для случая круглых отверстий. Ниже на рис. 2 приведён сравнительный график для двоякопериодической задачи с круглыми отверстиями и квадратной ячейкой периодичности растяжения p по оси y зависимости коэффициента концентраций напряжений K от отношения расстояния между соседними отверстиями к расстоянию между их центрами. Сплошной линией обозначен результат данной работы, а пунктирной примерный график из справочника.

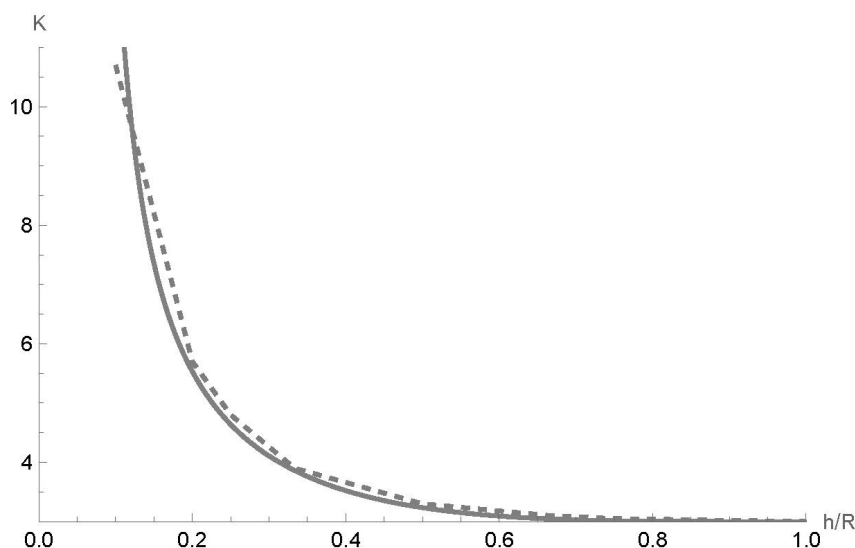


Рис. 2. Сравнительный график коэффициента концентраций напряжений

Результат сверен с решением в программно-вычислительном комплексе Abaqus. Сетка разбиения, граничные условия и нагрузки показаны на рис. 3 и рис. 4. Включение и матрица соединены с помощью инструмента Tie. Левая грань зафиксирована по оси X , на правой действует единичное растяжение по оси X . Ввиду ограничений расчетного комплекса, рассматривалось число включений 5×5 .

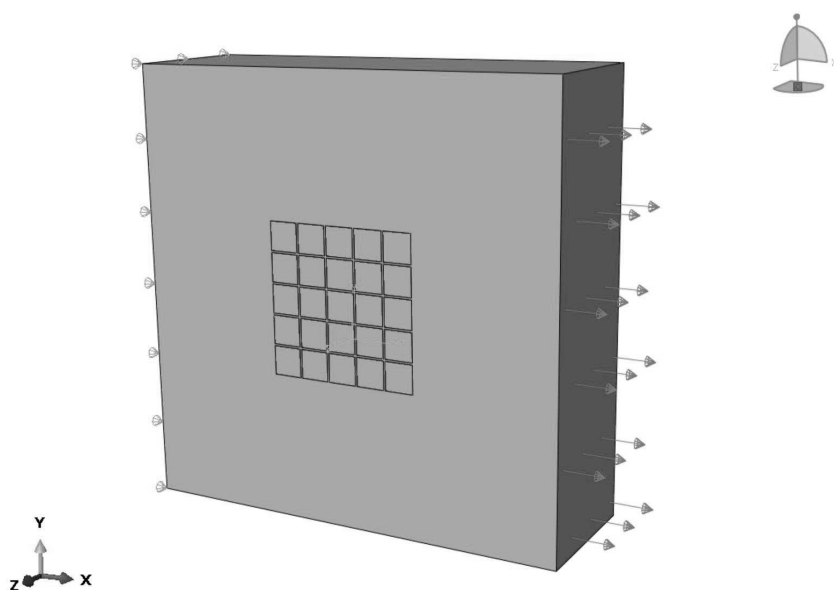


Рис. 3. Граничные условия и нагрузки в Abaqus.

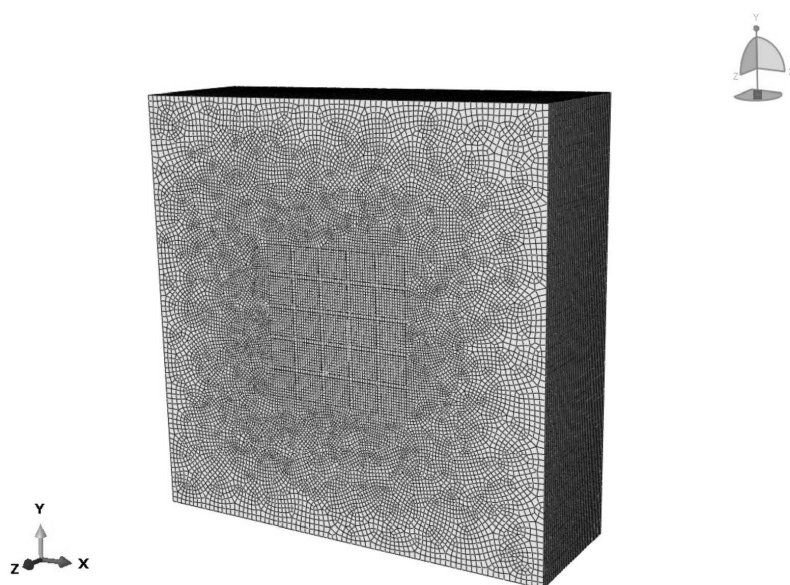


Рис. 4. Сетка разбиения в Abaqus.

Ниже на рис. 5-10 приведены сравнительные графики напряжений на границе основного включения от отношения расстояния между включе-

ниями d к стороне квадрата $a=1$ в точках 0 и $\pi/2$, где пунктирной линией обозначено численное решение в Abaqus, а сплошной – аналитическое решение данной работы. Отношение модулей упругости включения и матрицы равно 100, коэффициент Пуассона для включения и матрицы равен 0.3. Система координат (x, y) связана с системой (r, θ) по формуле $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, где $r = 1$ на границе включения ввиду отображения на внешность единичной окружности.

На Рис. 5-7 показаны нормальные напряжения, одинаковые для матрицы и включения σ_{rr} , окружные напряжения включения $\sigma_{\theta\theta R}$ и окружные напряжения матрицы $\sigma_{\theta\theta M}$ в точке $\theta = 0$ соответственно. На Рис. 8-10 показаны нормальные напряжения, одинаковые для матрицы и включения, σ_{rr} , окружные напряжения включения $\sigma_{\theta\theta R}$ и окружные напряжения матрицы $\sigma_{\theta\theta M}$ в точке $\theta = \frac{\pi}{2}$ соответственно.

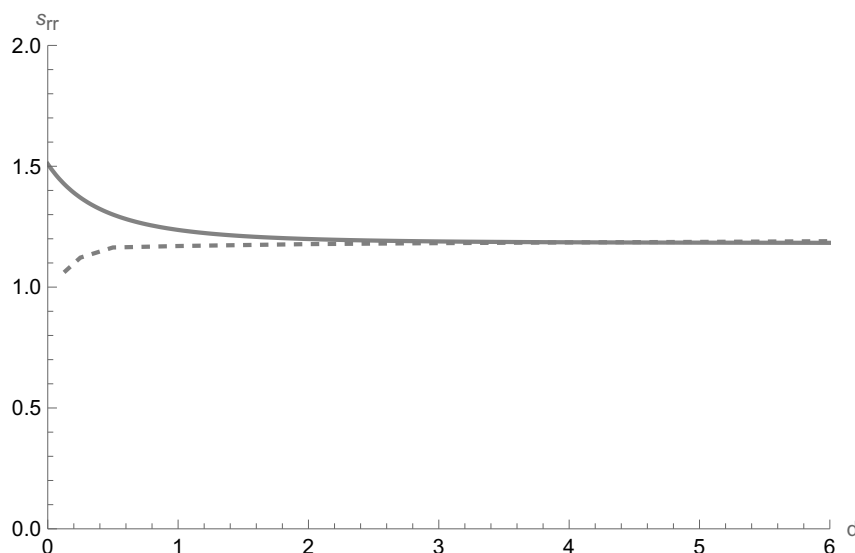


Рис. 5. Нормальные напряжения σ_{rr} в точке $\theta = 0$.

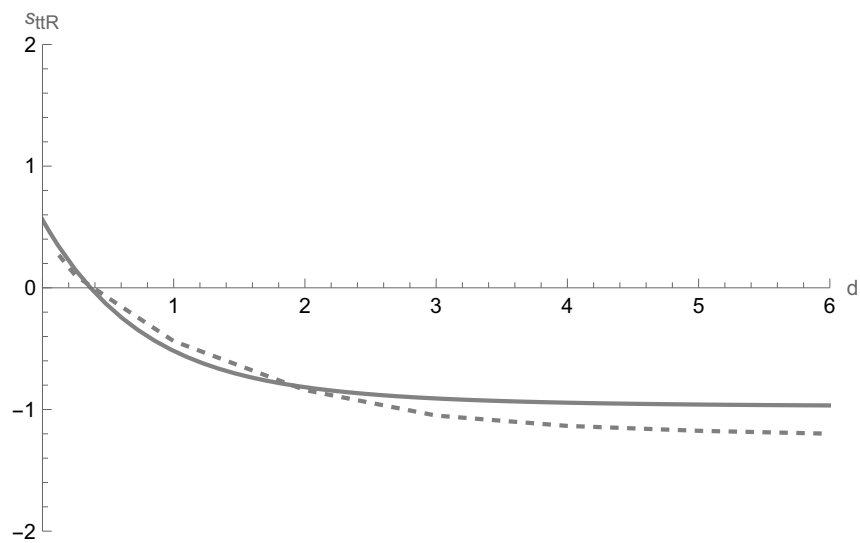


Рис. 6. Окружные напряжения включения $\sigma_{\theta\theta R}$ в точке $\theta = 0$.

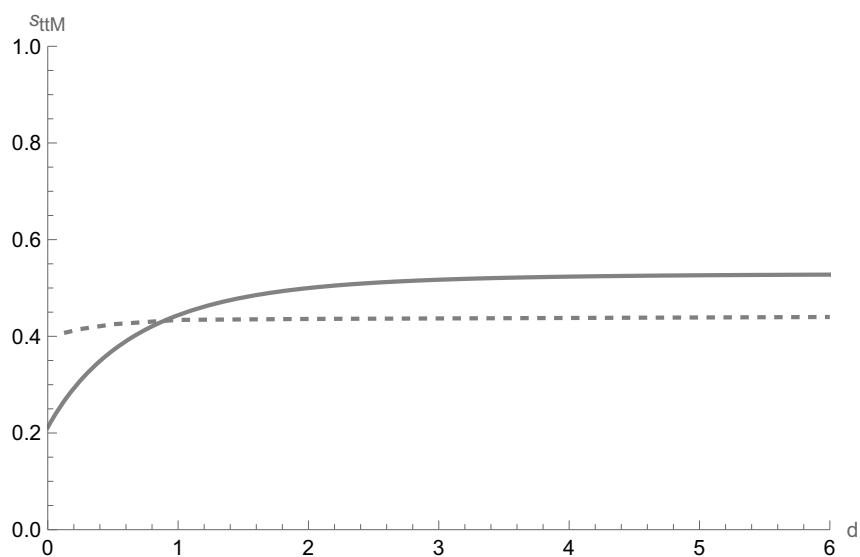


Рис. 7. Окружные напряжения матрицы $\sigma_{\theta\theta M}$ в точке $\theta = 0$.

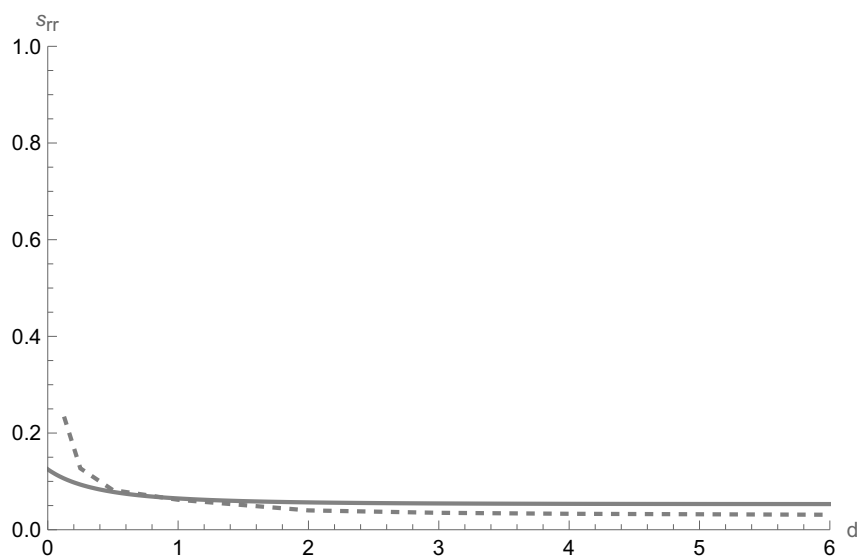


Рис. 8. Нормальные напряжения σ_{rr} в точке $\theta = \frac{\pi}{2}$.

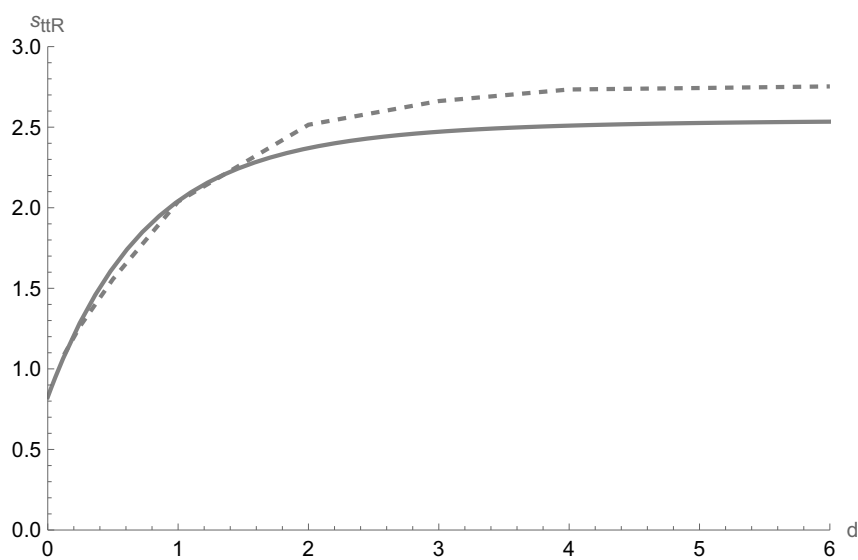


Рис. 9. Окружные напряжения включения $\sigma_{\theta\theta R}$ в точке $\theta = \frac{\pi}{2}$.

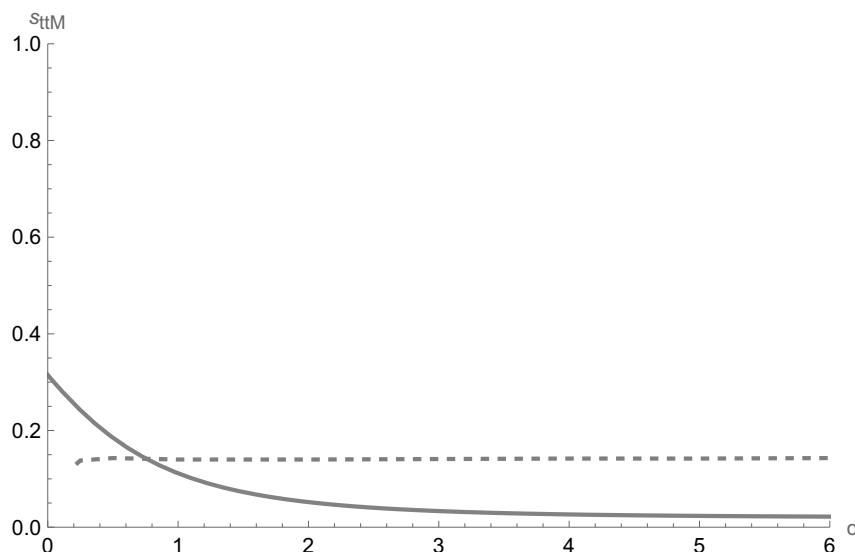


Рис. 10. Окружные напряжения матрицы $\sigma_{\theta\theta M}$ в точке $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Из представленных графиков на рис. 6-10 можно сделать вывод о сходимости в первом приближении с относительной погрешностью около 10%. Отклонения могут быть обусловлены ограничениями численной модели.

Также результат настоящей работы был сопоставлен с аналитическим решением для одного эллиптического включения: $m_1 = 0.5, m_3 = 0$, представленным в работе [3]. Совпадение оказалось полным, и поэтому не требует сравнительного графика. Это объясняется применением схожего метода решения, а также тем что для случая одного включения малый параметр ε в данной работе равен нулю.

§ 5. Заключение.

В рамках данного исследования разработано аналитическое решение плоской двоякопериодической задачи нагружения бесконечной упругой изотропной плоскости с решеткой квадратных включений. Предложенный подход эффективно учитывает важные параметры, такие как форма волокна, упаковка композита и соотношение свойств матрицы и волокон, что делает его универсальным для применения к аналогичным задачам.

Результаты аналитического решения были сопоставлены с результатами более простых случаев круговых отверстий и эллиптического включения, а также с результатами численного моделирования в программе

Abaqus. Сравнительный анализ с численным решением показал соответствие в первом приближении, подтверждая правильность предложенной аналитической модели. Расхождения можно обосновать воздействием факторов, не отражённых в численной модели, однако это не уменьшает общей надёжности полученных результатов.

Список литературы

1. Старцев И. Ф. *Тензор концентрации напряжений растягиваемой бесконечной упругой изотропной плоскости, ослабленной решеткой эллиптических включений* / Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2023. № 2.
2. Мухелишвили Н. И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости*. М.: Изд-во АН СССР, 1966.
3. Мальков В. М., Малькова Ю. В. *Деформация пластины с упругим эллиптическим включением*. / Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2015. Т. 2(60), вып. 4..
4. Савин Г. Н. *Концентрация напряжений возле малых отверстий в неоднородном напряженном плоском поле*. / Труды Днепропетровского инженерно-строительного института. 1937. Вып. 20.
5. Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. *Перфорированные пластины и оболочки*. М.: Наука, 1970.
6. Натанзон В. Я. *О напряжениях в растягиваемой пластинке, ослабленной одинаковыми отверстиями, расположенными в шахматном порядке* / Матем. сб. 1935. Т. 42, № 5. С. 617–636.
7. Савин Г. Н. *Распределение напряжений около отверстий*. Киев: Наукова думка, 1968.
8. Космодамианский А. С. *Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями и выступами*. Киев: Вища школа, 1975.
9. Eshelby J. D. *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems* / Proc. of Royal Society of London. Ser. A. Math. and Phys. Sci. 1957.
10. Peterson R. E. *Stress Concentration Factors*. New York: John Wiley & Sons, 1974.

References

1. *Startsev I. F. Stress Concentration Tensor for a Stretched Infinite Elastic Isotropic Plane Weakened by a Lattice of Elliptical Inclusions* / Moscow University Mechanics Bulletin. Ser. 1, Mathematics. Mechanics. 2023. No. 2.
2. *Muskhelishvili N. I. Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Moscow: USSR Academy of Sciences Publ., 1966.
3. *Malkov V. M., Malkova Yu. V. Deformation of a Plate with an Elastic Elliptical Inclusion*. / St. Petersburg University Bulletin. Ser. 1. 2015. Vol. 2(60), iss. 4.
4. *Savin G. N. Stress Concentration Near Small Holes in an Inhomogeneous Stressed Plane Field*. / Proceedings of Dnipropetrovsk Civil Engineering Institute. 1937. Iss. 20.
5. *Grigolyuk E. I., Fil'shtinsky L. A. Perforated Plates and Shells*. Moscow: Nauka, 1970.
6. *Nathanson V. Ya. On Stresses in a Stretched Plate Weakened by Identical Holes Arranged in a Checkerboard Pattern* / Mathematics Collection. 1935. Vol. 42, no. 5. P. 617–636.
7. *Savin G. N. Stress Distribution Around Holes*. Kiev: Naukova Dumka, 1968.
8. *Kosmodamiansky A. S. Plane Problem of Elasticity Theory for Plates with Holes and Protrusions*. Kiev: Vyshcha Shkola, 1975.
9. *Eshelby J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems* / Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. 1957.
10. *Peterson R. E. Stress Concentration Factors*. New York: John Wiley & Sons, 1974.

Информация об авторе

Илья Федорович Старцев, аспирант

ISSN 1560-750X

Математические труды, 2025, Том 28, № 3, С. 125-145

Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 3, P. 125-145

SPIN 2549-5701 AuthorID: 1280474
Scopus Author ID 58346368600

Author Information

Ilya F. Starcev, graduate student
SPIN 2549-5701 AuthorID: 1280474
Scopus Author ID 58346368600

*Статья поступила в редакцию 19.02.2025;
одобрена после рецензирования 05.07.2024; принята к публикации
07.07.2025*

*The article was submitted 19.02.2025;
approved after reviewing 05.07.2024; accepted for publication 07.07.2025*

ISSN 1560-750X

Математические труды, 2025, Том 28, № 3, С. 125-145
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 3, P. 125-145